

◎以下的重點提示或許可以在考題中使用，請各位同學參閱！

1、我們有恆等式  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ ，則  $\sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=1}^n (2k+1)$  可推出  $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^n k + n$ ，從而得到  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

同樣地，可以利用  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$  推出  $\sum_{k=1}^n k^2$ 。

2、泰勒展開式 (Taylor expansion)：

給定  $f(x)$  為實係數  $n$  次多項式， $a$  為實數，則  $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$  稱為  $f(x)$  在

$x=a$  處的泰勒展開式。註： $f^{(n)}(x)$  為  $f(x)$  的第  $n$  階導函數。

3、(1)  $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$  可推廣成  $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$ 。例如： $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ ，

由定義  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a^2}$  可推得  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 。

(2)  $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$  可繼續推廣成  $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Q}$ 。例如： $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，

由定義  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  可推得  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。

4、定積分  $\int_a^b f(x)dx$  可透過上下和與取極限、函數  $f(x)$  的圖形 (包括對稱性) 等方式來計算。

### 一、單選題：(每題 5 分；總分 30 分)

1、( ) 請計算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^{108} - 1}{x}$  的值為

- (1) 0                      (2) 108                      (3) -108                      (4) 不存在

2、( ) 請計算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$  的值為

- (1)  $\frac{1}{6}$                       (2)  $\frac{1}{5}$                       (3)  $\frac{1}{4}$                       (4)  $\frac{1}{3}$

3、( ) 給定  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$  以及圖形上一點  $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ，則通過點  $P$  的切線斜率為

- (1) -2                      (2) -1                      (3)  $-\sqrt{2}$                       (4)  $-2\sqrt{2}$

4、( ) 已知多項式  $f(x)$  滿足  $f'(3) = 5$ ，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h) - f(3)}{h}$  的值為

- (1) 5                      (2) 15                      (3) 20                      (4) 25

5、( ) 已知  $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ ，則  $f'(0)$  的值為

- (1) 6                      (2) 24                      (3) 0                      (4) 1

6、( ) 已知一物體的位移函數為  $S(t) = 10t - 4.9t^2$  (公尺)，則在時刻  $t = 100$  (秒) 時的瞬時加速度為

- (1) -48000                      (2) -970                      (3) -4.9                      (4) -9.8

二、多選題：(每題 5 分；總分 20 分。每題全部答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，錯三

個或三個以上選項得 0 分，未作答者不予計分)

7、( ) 以下選項中那些為正確？

- (1)  $f(x)=|x-1|$  在  $x=1$  處連續 (2)  $f(x)=|x-1|$  在  $x=1$  處可微  
(3)  $g(x)=[x]$  為遞增函數 (4)  $g(x)=[x]$  在  $x=1$  處連續  
(5)  $h(x)=(x-1)^2$  在  $x=1$  處可微

8、( )  $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$ ，則以下選項中那些為正確？

- (1)  $a=1$  (2)  $b+c=20$  (3)  $d+e=15$   
(4)  $f(x)$  除以  $(x-1)$  的餘式為 5 (5)  $f(x)$  除以  $(x-1)^2$  的餘式為  $10x-5$

9、( ) 已知  $f(x)$  為實係數多項式，且滿足  $\int_a^x f(t)dt = x^2+x-6$ ，則  $a$  可能為

- (1) -3 (2) -1 (3) 0 (4) 2 (5) 4

10、( ) 以下選項中那些為正確？ 2 3

- (1)  $\int_{-1}^1 x dx = 1$  (2)  $\int_{-2}^2 [x] dx = -2$  (3)  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9\pi}{4}$   
(4)  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$  (5) 給定任意實係數  $n$  次多項式  $f(x)$  則有  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \geq \int_a^b |f(x)| dx$

三、選填題：(每題 5 分；總分 50 分)

A、已知函數  $f(x)=(x-1)^{10}(2x-5)^{30}$ ，則  $f'(2)=$  (11) (12) (13)

B、已知函數  $f(x)=x^3+ax^2+bx$  的圖形和直線  $x-y+4=0$  相切於點  $(-2,2)$ ，則序對  $(a,b)=$  (14), (15)

C、函數  $f(x)=x^3-3x+2$  在區間  $[(16)(17), (18)]$  為嚴格遞減函數

D、已知點  $P(1,3)$  為三次函數  $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  圖形的反曲點，且以點  $P$  為切點的切線斜率為 4，則序對

$$(a,b,c)=((19)(20), (21), (22)(23))$$

E、設函數  $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$  在  $x=1$  處有極小值 3，則序對  $(a,b)=$  (24), (25)(26)

F、已知函數  $f(x)=x^3+3x^2+1$ ，則方程式  $f(x)-5=0$  有 (27) 個相異實根

G、已知方程式  $x^3-3x^2-9x-k=0$  有三個相異實根，則 (28)(29)(30)  $< k <$  (31)

H、求  $f(x)=2x^3+x^2-6x$  與  $g(x)=x^2+2x$  的圖形所圍成的區域面積為 (32)(33)

I、求由曲線  $y=x(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  與  $x$  軸圍成的區域繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為  $\frac{(34)}{(35)(36)} \pi$

J、小翰在夜市玩擲骰子遊戲，遊戲規則為若小翰擲出 1, 2, 3 點則可得 100 元；若擲出 4, 5 點則可得 300 元；若擲出 6 點則重新擲骰子。為使遊戲公平，則小翰一開始應付給店主 (37)(38)(38) 元。

桃園市立平鎮高級中學 107 學年第 2 學期 期末考 三年級 不限組別 數學甲 II [20190502300050101056] 全體考生 試題分析表

題號	題型	題分	標準答案	全體					226					高分組					61					低分組					全體答對率	難易指數	鑑別指數
				1	2	3	4	5	未	1	2	3	4	5	未	1	2	3	4	5	未	1	2	3	4	5	未				
1	單選題	5	3	110	115	0	0	0	1	46	15	0	0	0	0	16	44	0	0	0	1	48.67%	0.508	0.492							
2	單選題	5	2	103	122	0	0	0	1	35	26	0	0	0	24	36	0	0	0	1	45.58%	0.484	0.180								
3	單選題	5	1	78	146	0	0	0	2	28	33	0	0	0	14	45	0	0	0	2	34.51%	0.344	0.230								
4	單選題	5	4	138	86	0	0	0	2	49	12	0	0	0	19	40	0	0	0	2	61.06%	0.557	0.492								
5	單選題	5	1	198	27	0	0	0	1	61	0	0	0	0	43	17	0	0	0	1	87.61%	0.852	0.295								
6	單選題	5	4	182	43	0	0	0	1	59	2	0	0	0	29	31	0	0	0	1	80.53%	0.721	0.492								
7	多重選五	5	135	154	95	139	60	190	1	45	23	42	13	58	0	37	29	36	22	38	1	19.91%	0.189	0.115							
8	多重選五	5	1345	193	37	143	191	145	1	57	3	45	53	51	0	45	21	36	43	31	1	33.19%	0.336	0.344							
9	多重選五	5	14	159	83	98	185	52	2	51	14	21	54	8	0	33	35	38	42	18	1	38.94%	0.336	0.475							
10	多重選五	5	23	34	166	182	59	61	1	6	45	53	13	13	0	16	42	43	17	24	1	53.54%	0.525	0.164							
11	題組A	5	-50	138	88	0	0	0	0	46	15	0	0	0	16	45	0	0	0	0	0	61.06%	0.508	0.492							
14	題組B	5	31	151	75	0	0	0	0	48	13	0	0	0	23	38	0	0	0	0	0	66.81%	0.582	0.410							
16	題組C	5	-11	166	60	0	0	0	0	57	4	0	0	0	21	40	0	0	0	0	0	73.45%	0.639	0.590							
19	題組D	5	-37-2	156	70	0	0	0	0	53	8	0	0	0	19	42	0	0	0	0	0	69.03%	0.590	0.557							
24	題組E	5	0-3	161	65	0	0	0	0	59	2	0	0	0	18	43	0	0	0	0	0	71.24%	0.631	0.672							
27	題組F	5	2	141	85	0	0	0	0	48	13	0	0	0	24	37	0	0	0	0	0	62.39%	0.590	0.393							
28	題組G	5	-275	126	100	0	0	0	0	47	14	0	0	0	11	50	0	0	0	0	0	55.75%	0.475	0.590							
32	題組H	5	16	114	112	0	0	0	0	44	17	0	0	0	6	55	0	0	0	0	0	50.44%	0.410	0.623							
34	題組I	5	130	126	100	0	0	0	0	43	18	0	0	0	10	51	0	0	0	0	0	55.75%	0.434	0.541							
37	題組J	5	180	47	179	0	0	0	0	25	36	0	0	0	9	52	0	0	0	0	0	20.80%	0.279	0.262							

選填題或五選項以上各題以 1(或A) 表示作答正確, 2(或B) 表示作答錯誤