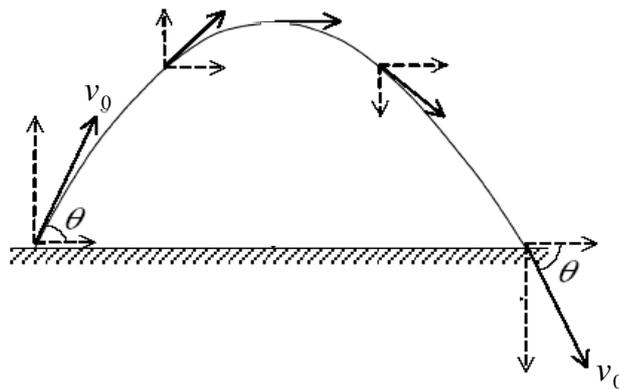


平鎮高中 高二物理 學習資料 (II)

PHYSICS

第二章 平面運動



$$y = (\tan \theta) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2}$$

【2-1 平面向量】

一、基本觀念與例題

【主題一】位置向量與位移

◎質點在坐標平面上運動，若任一時刻其位置為 (x, y) ，則其

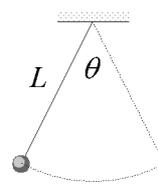
$$\text{位置向量 } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \begin{cases} \text{其量值 } |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{方向和 } +x \text{ 軸夾 } \theta \text{ 角, 其中 } \theta = \tan^{-1} y/x \end{cases}$$

◎平面運動之位移：若質點由 A 點移動至 B 點（即位置向量由 \vec{r}_A 變為 \vec{r}_B ），則其位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ （注意必須要用向量的減法，不可直接大小相減），與所經過的運動路線無關。

例 1. 設坐標軸上每一單位長 1 米，一質點在平面上運動。由起點 A (4, 3) 沿一曲線移動至 B (-5, 12)，寫出：(a)起點的位置向量，並求其大小和方向 (b)終點的位置向量，並求其大小和方向 (c)位移，並求其大小和方向。

類 1-1. 一質點作圓周運動，若圓周的半徑為 R ，則考慮一個週期內，任意兩點間的位移量值時，其最大值為何？

類 1-2. 擺長 L 的單擺，由左側開始擺動，則單擺在半個週期內的位移量值為何？路徑長為何？

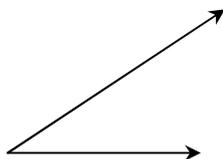


【主題二】向量的合成

◎將數個向量合成為一個向量時，可採用下列幾種方法。注意合成的向量只有一種可能（唯一解）：

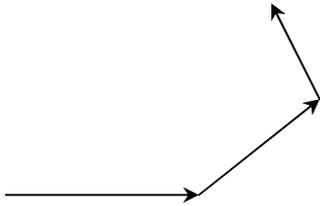
◎平行四邊形法：①將兩個向量起點相接 ②利用平行四邊形法可求出和向量。

如：



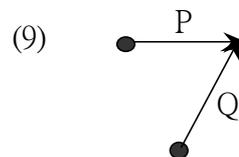
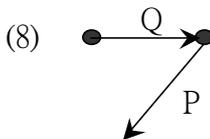
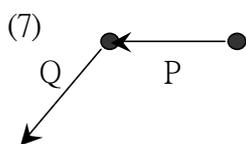
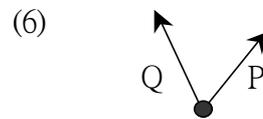
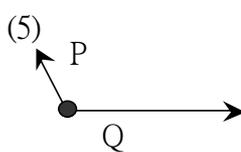
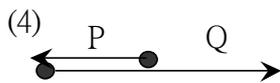
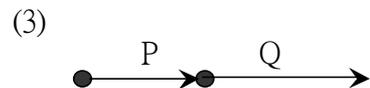
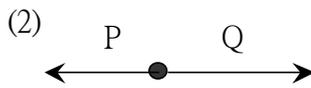
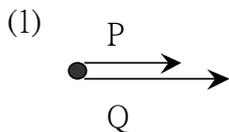
◎三角形法及多邊形法：①將兩個(或兩個以上)的向量兩兩起點與終點相接 ②和向量為第一個起點連至最後一個終點之向量。

如：



【分析】注意平行四邊形法為兩個向量起點相接；但三角形法為起點與終點相接

例 2. 畫出下列 \vec{P} 、 \vec{Q} 向量的：(a) 向量和 $\vec{P} + \vec{Q}$ (b) 向量差 $\vec{P} - \vec{Q}$ (c) 向量差 $\vec{Q} - \vec{P}$



例 3. 大小均為 a 的兩向量，求下列夾角時和為何？(a) 0° (b) 90° (c) 120° (d) 60° (e) 45°

類 3-1. 兩大小均為 a 之向量，夾角為 θ ，則其和為何？

類 3-2. 有甲、乙兩個質點，其速度分別為 $(-1, 3)\text{m/s}$ 與 $(1, 2)\text{m/s}$ ，則兩速度的夾角為何？

◎代數法：①寫出每個向量之 x 分量與 y 分量 ②和向量為 x 分量相加， y 分量相加。

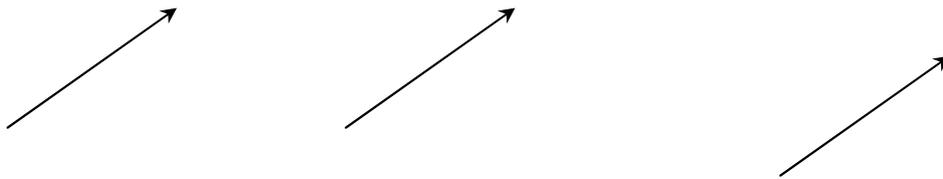
如： $\vec{A}_1=3\vec{i}+4\vec{j}$ ； $\vec{A}_2=-4\vec{i}+3\vec{j}$ 。則 $\vec{A}_1+\vec{A}_2=-1\vec{i}+7\vec{j}$ 。

例 4. 若 $\vec{F}_1=10 \text{ kgw}$ 向東， $\vec{F}_2=8 \text{ kgw}$ 向南， $\vec{F}_3=20 \text{ kgw}$ 向東偏北 60° 求三者的合力大小。

【主題三】向量的分解

◎任何一個向量可以分解為數個向量之和，此時稱為向量的分解。注意此時之分法有無限多種，而分向量的大小不一定小於原向量之大小。

如：



例 5. 若將一速度 \vec{v} 分解為 \vec{v}_x 和 \vec{v}_y ，則 \vec{v}_x 或 \vec{v}_y 的量值一定小於或等於 \vec{v} 的量值嗎？

例 6. 一斜面傾斜角 30° 試將重力加速度 \vec{g} 分解成兩個向量：平行於斜面與垂直於斜面，並求出兩分量之大小。

◎質點之運動軌跡方程式：在 $x(t)$ 與 $y(t)$ 之函數關係中，消去時間 t ，即得運動軌跡方程式。

例 7.一質點在平面上運動，其位置分量 x 、 y 與時間 t 的關係為 $x=2\cos t$ ， $y=3\sin t$ ，則
 (a)質點出發位置為何？ (b)質點路徑所遵守的方程式為何？ (c) $x=-2$ 時， y 之值為何？

類 7-1.一質點的運動方程式為 $x=2t$ ， $y=3t^2$ ，其軌跡方程式為何？

類 7-2.某質點在平面上運動時，其路徑滿足 $y=2x^2+4x+2$ ，已知 y 與時間 t 之關係為 $y=2t^2$ ，則 x 與時間 t 之關係為何？

二、習題

【Part A】基本觀念題

- 1.斜面傾斜角 θ ，將重力加速度 g 分解成平行於斜面與垂直於斜面的兩個向量時，其值大小各若干？此時答案是否唯一？與向量之分解有無限多種分法是否矛盾？
- 2.兩個大小為一定的共點力，如其間的夾角由 0° 增至 90° 時，則其合力的大小如何變化？【62 聯考】若夾角由 0° 增至 180° 時，合力的大小如何變化？
- 3.是否可能將一向量分解成兩向量，而分成的兩個向量都和原向量大小相等？（即是否可能 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ，且 $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}|$ ？）
- 4.是否可能 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ，且 $|\vec{A}| + |\vec{B}| = |\vec{C}|$ ？

【Part B】加強練習題

- 1.有兩個速度向量 \vec{v}_1 和 \vec{v}_2 ，其量值分別為 5 m/s 和 12 m/s ，則兩個向量合成後的最大值及最小值各為何？
- 2.已知三向量在平面上和向量為零，其中有兩向量互相垂直，大小各為 12 與 16 ，則第三個向量的大小和方向為何？
- 3.一飛機以 100 m/s 之速度向北偏東 30° 方向航行，若無風力之影響，求此速度在向東及向北方向的分速度各為若干？
- 4.一飛機以 100 m/s 之速度飛行，航行為向北偏東 30° 方向，並以 30° 的仰角爬升，若無風力之影響，求此速度在向東及向北、及向上的分速度各為若干？
- 5.若 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ， \vec{A} 、 \vec{B} 、 \vec{C} 皆非零向量，則何者一定正確？ (A) $|\vec{C}| > |\vec{A}|$ (B) $|\vec{C}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$ (C) $|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$ (D) $|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A} \cdot \vec{B}|$ (E) $|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}| \times |\vec{B}|$
 【65 夜大】

例 2. 有一時鐘的秒針長 20 公分，則由 12:00:00 到 12:00:15 的過程中：

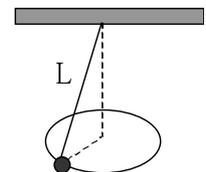
- (a) 整個過程的平均速度為何？ (b) 整個過程的平均速率為何？
 (c) 秒針針尖的速率為何？ (d) 在 12:00:00 的瞬時速度為何？
 (e) 在 12:00:15 的瞬時速度為何？ (f) 整個過程的平均加速度為何？

類 2. 某物體初速為 v ，於 t 時間內運動方向偏轉 120° ，則此時間內其平均加速度為何？

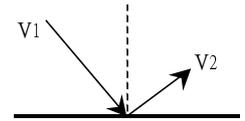
例 3. 一小球以等速率 2.0 m/s 繞圓周逆時針轉動，每 10 秒繞一圈，由。試求：

- (a) 小球由 +x 軸出發繞 90° 至 +y 軸的 $1/4$ 圈時間間隔內的平均加速度。
 (b) 小球從 +x 軸出發，僅繞 1° 的時間間隔內的平均加速度。

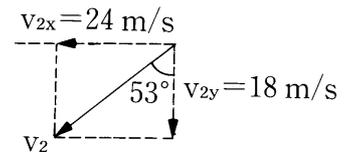
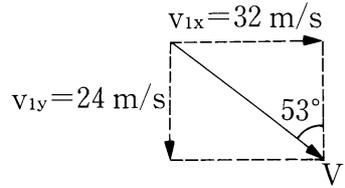
類 3. 一小球以細繩懸掛，在水平面上作等速率的圓周運動，繩長 L ，繩子與鉛垂線夾角為 θ ，如右圖。已知小球繞行一周費時為 t ，則 (a) 的小球運動的速度量值為何？(b) 小球於半週期內的平均速度量值為何？(c) 小球於半週期內的平均加速度量值為何？



例 4. 一小球被擲向光滑之地面後反彈跳起，在碰撞發生前後，其入射速度 v_1 及反彈速度 v_2 分別與鉛垂線夾角為 θ_1 及 θ_2 ，若反彈過程之水平速度不變，且發生反彈之時間為 t ，則反彈時之平均加速度量值為何？【85 聯考類題】



類 4. 一網球與牆面碰撞如圖，若 $v_1=40\text{m/s}$ ， $v_2=30\text{m/s}$ ， $\theta=53^\circ$ ，球與牆接觸時間為 0.02s ，則在接觸時球之平均加速度量值約為：(A) 3500m/s^2 (B) 2800m/s^2 (C) 500m/s^2 (D) 400m/s^2 (E) 300m/s^2

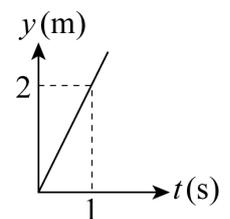
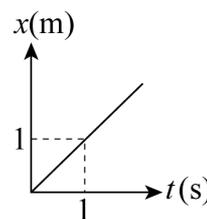


例 5. 某質點在平面上運動，其位置向量與時間的關係可寫為 $\vec{r}(t) = pt\vec{i} + qt^2\vec{j}$ ，其中 p 、 q 為常數，求 (a) $0\sim 3$ 秒時之平均速度 (b) 3 秒時之速度與加速度。

類 5-1. 質點在平面上運動，其位置向量 \vec{r} 與時間 t 的關係式為 $\vec{r} = 6t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (SI 制)，則此質點 4 秒內之平均速度大小為若干？

類 5-2. 在 x - y 平面上運動的質點，其 x 方向與 y 方向位置對時間的關係分別是 $x=3t^2+5$ ， $y=-4t^2+3$ ，單位為 SI 制，則此質點的加速度大小為若干？

類 5-3. 右圖表在平面上運動的某質點，其位置 x ， y 與時間 t 的圖形，則該質點的初速度為 (A) $\hat{i} + 2\hat{j}$ (B) $2\hat{i} + \hat{j}$ (C) $\hat{i} + \hat{j}$ (D) $\hat{i} - 2\hat{j}$ (E) $-\hat{i} + 2\hat{j}$ 公尺／秒。



◎運動的獨立性：由上例可知，做平面運動之物體，其速度或加速度可分別在 x 方向與 y 方向上單獨處理後再組合而成，兩方向的運動彼此互不影響，稱之為運動的獨立性。

◎**加速度與速度**之方向關係：

1. 加速度與速度之方向可能相同（如直線加速前進）或相反（如煞車漸漸停止時），也可能垂直（如圓周運動），或是夾任何角度（如下節介紹的斜向拋體運動）均有可能。

2. 平均速度的方向就是物體位移的方向（由平均速度之定義可知）；

瞬時速度的方向就是物體運動的切線方向（因為即是物體很短時間的位移）

3. 加速度的方向就是物體①受力的方向 ②速度變化的方向（因 $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$ ）
但不一定是速度或運動的方向（如討論 1.）。

4. 我們可將加速度向量分解成：①平行於物體運動方向（切線方向）及②垂直於物體運動方向（法線方向）兩向量，分別稱為切線加速度及法線加速度。其中切線加速度掌管物體速度大小的變化，而法線加速度掌管物體速度方向的變化。（如：直線變速度運動只有切線加速度；等速圓周運動只有法線加速度；行星繞恆星若為變速率之橢圓軌道，則兼有切線加速度及法線加速度）。

例 6. 下列敘述何者正確？

- (A) 一質點自半球型碗之邊緣下滑，加速度方向指向碗的球心
- (B) 做等速率曲線運動的物體，加速度方向恆與速度方向垂直
- (C) 沿一直線運動的物體，法線加速度必為零
- (D) 若加速度與速度夾 60° 角，則物體之速率變大，方向改變
- (E) 若加速度與速度夾 120° 角，則物體之速率變大，方向改變。

類 6. 作變加速度曲線運動的質點，下列何者必改變？ (A) 速度方向 (B) 速度大小 (C) 法線加速度方向 (D) 法線加速度大小 (E) 切線加速度大小。

二、習題

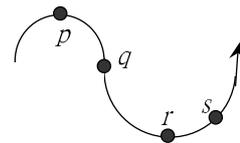
【Part A】基本觀念題

1. 平均速度的方向與何者相同？（路程、受力、末速度、位移、加速度、速度變化、還是初速度？）
2. 瞬时速度的方向與何者相同？（路程、受力、該點之速度、該點之切線方向、位移、加速度、速度變化、還是初速度？）
3. 加速度的方向與何者相同？（路程、受力、末速度、位移、加速度、速度變化、瞬時速度、還是初速度？）
4. 描述 $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ 的運動方式。若起點為原點，寫出其位置向量 $\vec{r}(t)$ 。
5. 描述 $\vec{v} = 3\vec{i} + 4t\vec{j}$ 的運動方式。若起點為原點，寫出其位置向量 $\vec{r}(t)$ 。
6. 描述 $\vec{v} = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$ 的運動方式。若起點為原點，寫出其位置向量 $\vec{r}(t)$ 。
7. 已知一質點作平面運動，起點 $(3, 0)$ ，初速度 $(0, 10)$ ，加速度 $(+2, -4)$ ，寫出其位置向量 $\vec{r}(t)$ 、及其速度 $\vec{v}(t)$ 、加速度 $\vec{a}(t)$ 。
8. 若瞬時速度與平均速度時時刻刻均相同，則此物體必做直線運動嗎？必是等速度嗎？

【Part B】加強練習題

1. 某人從三重交流道路標為 28 km 處進入高速公路後，車子的速率一直保持為 80 km/h，但從路標 198 km 處以後，因塞車行車速率減為 50 km/h，以這樣的速率一路行駛至路標 327 km 處離開高速公路。(a)此人在高速公路上所行駛的總路徑長為何？(b)此人在高速公路的整個行駛過程中，平均速率為何？
2. 一時鐘的秒針長 10 cm，當其從 0 秒位置移動至 15 秒位置的時間間隔內，秒針尖端平均速度的量值為何？其平均速率為何？
3. 一物體在 5 秒內由初位置 $(x, y) = (3\text{m}, 2\text{m})$ ，運動至末位置 $(x, y) = (-1\text{m}, 5\text{m})$ ，則物體在這段時間內的平均速度為何？
4. 一汽車以 60 km/h 的等速度向東行駛 60 秒後，再改以 80 km/h 的等速度向南行駛 60 秒，則在這 120 秒內，車子的位移為何？路徑長為何？平均速度為何？平均速率為何？
5. 有甲、乙、丙、丁四個質點，在平面上作等速度運動，其速度分別為 $\vec{v}_{\text{甲}} = (4, 4)$ ， $\vec{v}_{\text{乙}} = (0, 4)$ ， $\vec{v}_{\text{丙}} = (-2, 0)$ 以及 $\vec{v}_{\text{丁}} = (1, -1)$ （單位：SI 制）。則 (a) 哪些質點運動的方向彼此垂直？(b) 哪個質點運動的速率最大？其量值為何？(c) 甲、丙兩質點運動方向的夾角為幾度？

6. 一質點以等速率沿著曲線移動，如圖。已知該曲線是由兩個不同半徑的半圓所組成。則質點通過 p 、 q 、 r 、 s 四點時的速度方向為何？

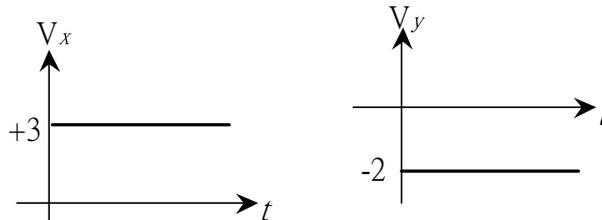


7. 某質點在水平面內作半徑 R 之等速率圓周運動，週期為 T ，求在經歷 $T/6$ 時間內此質點之 (1) 平均速度量值 (2) 平均加速度量值。

8. 有一時鐘的秒針的長度為 20 公分，轉動一周費時 60 秒，則 (a) 秒針針尖的移動速率為何？ (b) 秒針針尖通過 12 點位置的瞬時速度為何？ (c) 秒針針尖由 12 點移動到 3 點過程的位移為何？ (d) 承 (c)，該過程的平均速度為何？ (e) 承 (c)，該過程的平均加速度為何？

9. 一質點由坐標平面之 $(5, 0)$ 的位置出發 (單位 SI 制)，以固定的速度 10m/s 向西偏北 60° 運動，則 (a) 質點的速度為何？ (b) 質點經過幾秒到達 y 軸？

10. 某質點在平面上運動時，其速度分量與時間的圖形如圖 (SI 單位)。若質點的出發點為 $(4, 2)$ 公尺，則 (a) 該質點的速度為何？ (b) 該質點在 3 秒內的位移為何？ (c) 該質點在第 3 秒的位置為何？



11. 一質點在平面上運動時，其速度分量為 $v_x = 2t$ ， $v_y = t^2 + 1$ (單位：SI 制)。若質點的出發點為坐標原點，則 (a) 質點的初速度為何？ (b) 質點於第 3 秒時的瞬時速度與 x 軸夾角的正切值為何？ (c) 質點在時間 t 時的加速度為何？ (d) 質點在 $0 \sim 3$ 秒的平均加速度為何？

12. 甲自原點向北，乙自甲西方距離 d 處向東，同時以速度 v 開始運動，則兩人最近之距離為何？ (A) d (B) $d/2$ (C) $d/\sqrt{2}$ (D) $d/\sqrt{3}$ (E) $d/4$ 。【68 聯考】

13. 某物以 $\vec{v}_0 = 3\vec{i}$ (m/s) 之初速自原點開始運動，加速度為 $\vec{a} = -\vec{i} - 0.5\vec{j}$ (m/s²)，求此物在 $+\vec{i}$ 方向到達最遠時速度為何？位置為何？

【2-3 拋體運動】

一、基本觀念與例題

- ◎拋體運動是由：①水平方向的等速度運動，和②鉛直方向的等加速度運動，組合而成，由運動的獨立性知兩者的運動彼此互不影響，可以分開來單獨處理。
- ◎在以下拋體運動的討論中，均假設空氣阻力可忽略，物體僅受到均勻的向下重力加速度 g ，在此條件下之拋體運動均為等加速度運動。

【主題一】水平拋射

- ◎假設物體離地面之高度為 H 做水平拋射時，可將其分為：

(1)水平方向等速度，(2)鉛直方向等加速度($a = -g$) 的運動組合。

設水平射出初速度大小為 v_0 ，取射出點為原點 O ，向右的水平方向為 $+x$ 方向，向上的鉛直方向為 $+y$ 方向，則：

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = & \vec{i} + & \vec{j} \\ \vec{v}(t) = & \vec{i} + & \vec{j} \\ \vec{r}(t) = & \vec{i} + & \vec{j} \end{cases}$$

消去 t ，得頂點位在原點的拋物線方程式：

| | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$ | 【此方程式即為主題二斜向拋射時，取 $\theta = 0$ 之結果】 |
|----------------------------|-------------------------------------|

- ◎由射出至落到地面：

| | | |
|---|------------|-----------------------|
| { | 時間 $t =$ | (相當於等高之物體自靜止下落至地面的時間) |
| { | 速度 $v =$ | |
| { | 水平射程 $R =$ | |

例 1.甲、乙兩粒質量相同的小石子，自同一高度以水平方向的初速拋出，落在平坦的地面上。已知甲的初速為乙的 2 倍。若不計空氣阻力，則下列敘述何者錯誤？(A) 甲的射程較大 (B)落地時，甲的動能較大 (C)落地時，兩者的加速度相等 (D)兩者在空中的飛行時間相等 (E)落地時，甲的速度的鉛直分量較大【91 指定考科】

類 1-1.將質量為 $m_{甲}$ 與 $m_{乙}$ ($m_{甲} > m_{乙}$) 的甲、乙兩個小球，在離水平地面同一高度，分別以 $V_{甲}$ 與 $V_{乙}$ ($V_{甲} > V_{乙}$) 的水平速度平拋出去，若不計空氣阻力，則下列的敘述哪些是正確的？(A)甲球與乙球同時落地 (B)甲球的落地地點比乙球的遠 (C)飛行了一秒時，甲球比乙球離地面的高度來得低 (D)甲、乙兩球在落地前的速率均不變 (E)甲、乙兩球在落地前的動能相同【96 學力測驗】

類 1-2. 甲、乙兩鐵球同時由相同高度釋出，甲球 100 克以水平射出，乙球 200 克垂直自由下墜，兩球均落到同一水平地面。若不計空氣阻力，下列敘述何者正確？
(A) 甲球經過的路徑較長，比較慢著地 (B) 甲球運動的速率較快，比較先著地 (C) 乙球比甲球受的重力大，故乙球先著地 (D) 兩球都以相同的加速度下墜，故同時著地。【83 學力測驗】

例 2. 一轟炸機以 150 m/s 的等速度平飛接近目標，若飛機高度為 1960 m，則飛機應該在距離目標上空多遠時就投下炸彈，才能命中目標？（設 $g=9.8\text{m/s}^2$ ）

類 2. 某人採取蹲姿，平舉步槍練習射擊，槍管離地的高度僅有 1 m，子彈射出槍口的速度為 450 m/s。假設子彈射出槍口的同時，有一個沾附在槍管上的小物件，被震落至地上，則 (a) 子彈落至地面所經歷的時間，和該小物件掉落至地上的時間，何者較長？ (b) 該子彈的射程為何？（設 $g=10\text{m/s}^2$ ）

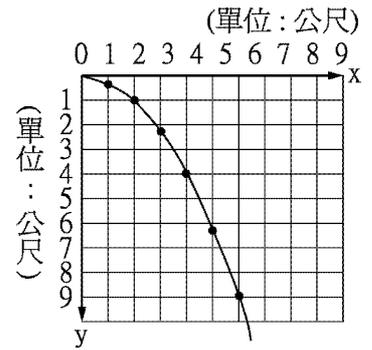
例 3. 將一石頭以初速 v_0 沿水平方向拋出，多久後速率增為初速之 2 倍？

類 3-1. 一物體作水平拋體運動，初速為 12m/s，當速率為 15m/s 時，此物體已落下多少公尺？（ $g=10\text{m/s}^2$ ）

類 3-2. 一質點作水平拋體運動，初速為 v_0 ，其速度方向由俯角 37° 增為 53° 的過程中，經歷多少時間？（重力加速度為 g ）

例 4. 一棒球飛向二壘的正上方，球與二壘的水平距離為 6.0 m 時，教練開始計時，此時球的高度為 1.8 m，速度為 20 m/s 水平向前。若忽略阻力，則下列有關此球運動的敘述哪些正確？（重力加速度為 10 m/s^2 ）【92 指定考科】
(A) 0.3 s 時球飛至二壘正上方 (B) 飛至二壘正上方時，水平速度分量大於 20 m/s
(C) 0.3 s 時球的高度為 1.35 m (D) 球落地點與二壘間的水平距離為 6.0 m
(E) 若球與地面作彈性碰撞，則反彈後的最高點與二壘間的水平距離為 12 m

類 4. 一物體作水平拋射，其拋射的軌跡如附圖所示，若該處的重力場強度 $g = 10$ 公尺/秒²，則物體拋出的初速 v_0 為何？



例 5. 有一物體從高樓頂被沿水平方向拋出，已知高樓頂離地的高度為 40 m，而物體落地處和高樓之間的水平距離也是 40 m，設 $g = 10 \text{ m/s}^2$ ，則

- (a) 物體被拋出時的初速為何？
- (b) 落地瞬間物體與水平面夾角為 θ ，求 $\tan\theta$
- (c) 落地瞬間切線加速度與法線加速度各為何？

類 5-1. 以 v 之初速度，水平拋出一物體，當其運動方向與水平夾 60° 角的瞬間，(重力加速度為 g)，求 (a) 所需時間 (b) 水平位移 (c) 切線加速度

類 5-2. 一物自高度 h 的塔頂上水平拋射。已知著地時之瞬時速度和水平地面的夾角為 45° ，則此物的水平位移為何？【70 夜大】

例 6. (a) 某生將一靜止置於長斜坡頂端的皮球，沿水平方向踢出，結果皮球的落地處仍在斜坡上。已知斜坡的斜角為 30° ，皮球被踢出的初速為 10 m/s ，則皮球落地處距離坡頂有多遠？ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(b) 若上題改為沿仰角 30° 斜向踢出，初速為 10 m/s ，則皮球落地處距離坡頂有多遠？

例 7. 一石子以水平速度 5 m/s 由階梯頂端水平拋出，若每階梯之高度為 30 cm 寬度為 40 cm，則石子會落於第幾個階梯上？歷時若干秒？（出發位置為第 0 階， $g=10 \text{ m/s}^2$ ）

【主題二】斜向拋射

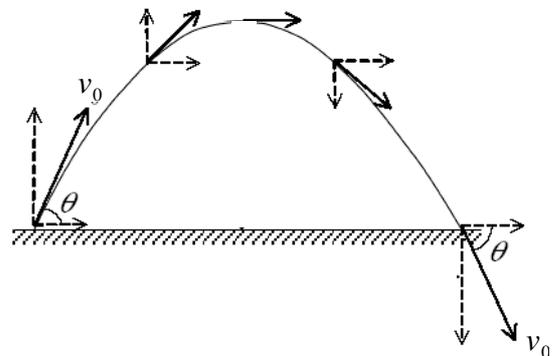
◎將一物體在地面上以初速 v_0 及仰角 θ （即拋出方向與水平方向之間的夾角）拋出，稱為斜向拋射運動。

為方便分析，取拋出點為 x-y 坐標軸原點，向右水平方向為 +x 方向（向右為正，向左為負），向上鉛直方向為 +y 方向（向上為正，向下為負）。

◎雖然拋體運動時時刻刻的運動方向、及運動速度大小都在變化，但是我們仍可利用運動的獨立性，將其分成沿水平和沿鉛直兩方向的運動分別處理：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{水平方向} \rightarrow \text{等速度運動。 (因運動過程僅受向下的重力，水平方向未受力)} \\ \text{鉛直方向} \rightarrow \text{等加速度運動， } a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2。 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}(t) = \quad \quad \quad \vec{i} + \quad \quad \quad \vec{j} \\ \vec{v}(t) = \quad \quad \quad \vec{i} + \quad \quad \quad \vec{j} \\ \vec{r}(t) = \quad \quad \quad \vec{i} + \quad \quad \quad \vec{j} \end{array} \right.$$

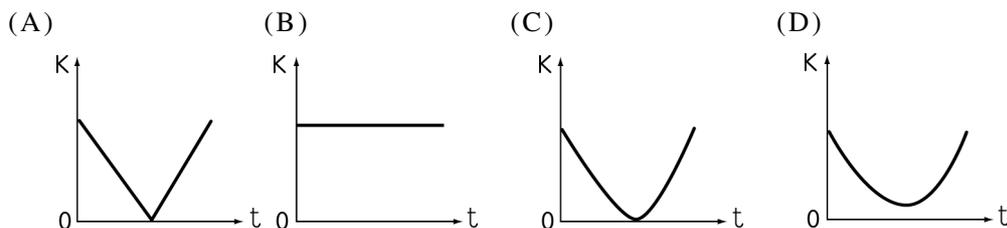


消去 t ，得起點為原點的拋物線方程式：

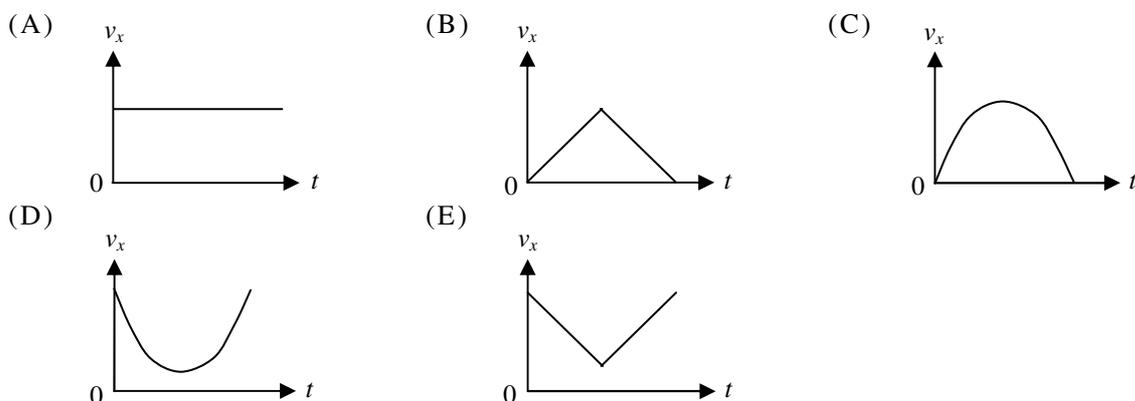
$$y = (\tan \theta) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2}$$

此為一通過原點開口向下的拋物線。只要知道物體被拋出的初速度 v_0 （含量值和方向），即可預測拋物線的形狀（當然也就知道最高點的位置、射程）。

例 8. 將足球由地面用力向斜上方踢，球向空中飛出，若不考慮空氣阻力，下列哪一圖可以代表球的動能 K 與落地前飛行時間 t 的關係？【96 學力測驗】

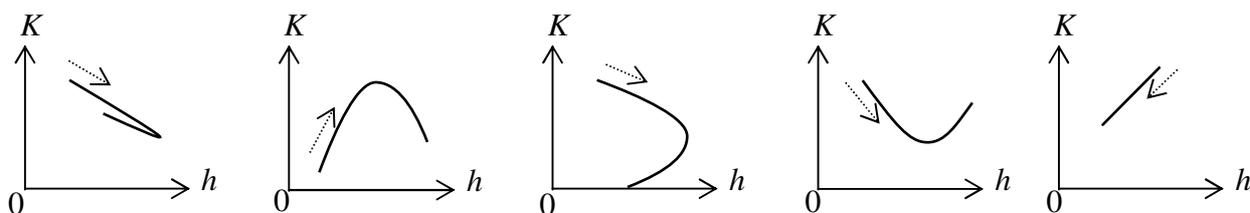


類 8-1. 棒球比賽中，打擊者用力向斜上方揮棒，擊出高飛全壘打。若不考慮空氣阻力，因此棒球在空中飛行時水平方向不受外力作用，則下列圖形何者可以代表棒球的水平方向速度 v_x 與其落地前飛行時間 t 的關係？【101 學力測驗】



類 8-2. 跳遠比賽時，某生助跑後從起跳板躍起落在沙坑中，已知起跳點與落地點在同一水平面。若空氣阻力可忽略，跳遠者僅受重力作用且可視為質量集中於質心的質點，則在該生起跳後到落地前的過程中，下列有關其運動的敘述哪些是正確的？
 (A) 該生作等速度運動 (B) 該生作等加速度運動 (C) 該生作變速圓周運動 (D) 該生的速率在最高點達最大 (E) 該生落地前的瞬間速率等於躍起時的瞬間速率 【101 學力測驗】

類 8-3. 某生打籃球時在罰球線上立定向斜上方拋投，投入一個空心球。球從離手到進入籃框為止的過程中，其動能 K 隨距地面之高度 h 的變化圖，最接近下列何者？圖中虛線的箭頭方向表示過程的先後順序。【104 指定考科】



例 9. 一砲彈在地面上以初速 40 m/s 及仰角 30° 斜向射出，設重力加速度 $g=10 \text{ m/s}^2$ ，試求 (a) 飛行 3 秒後，砲彈的加速度、速度、及位移各為多少？ (b) 軌跡方程式。

- 類 9-1. 一質點在地面上以初速 100m/s 及仰角 53° 斜向射出，重力加速度 $g=10\text{ m/s}^2$ ，
- (a) 飛行 12.5 秒後，質點水平位移為何？ 距地高度為何？
 - (b) 飛行 12.5 秒後，質點速度大小為何？ 運動之方向與水平面之夾角為何？
 - (c) 飛行 12.5 秒後，質點加速度為何？ 切線加速度為何？ 法線加速度為何？
 - (d) 寫出以拋出點為原點之軌跡方程式。

類 9-2. 以初速 v_0 仰角 60° 自地面斜向上拋出一球，經歷多久時間後，球的運動方向與水平成俯角 30° ？

例 10. 設物體自原點斜向拋出，空氣阻力不計，其軌跡方程式是 $5x^2 - x + y = 0$ ，重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$ ，求 (a) 拋射角的正切值為何？ (b) 物體的初速度為何？ (c) 拋出瞬間之切線加速度為何？

類 10. 已知由原點斜向拋出一物體，其軌跡方程式為 $2x^2 - 3x + 4y = 0$ ，則物體初速度之水平分量及垂直分量各為多少？（但 $g = 9.80 \sim 3.13^2$ ）【74 夜大】

◎到達最高點時：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{所需時間 } t = \\ \text{上升的最大高度 } H = \\ \text{速度 } v = \\ \text{加速度 } a = \end{array} \right.$

◎落回地面時：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{拋體全程飛行時間 } t = \\ \text{水平射程 } R = \\ \text{速度 } v = \\ \text{加速度 } a = \end{array} \right.$

【結論】

◎拋體運動的分析關鍵在於：

①水平方向速度不變→所以射程 $R = (v_0 \cos \theta) \times t$

②鉛直方向為初速度 $v_0 \sin \theta$ 的等加速度運動 ($a = -g$)。

→可用 1-4 節的三個等加速度公式求出飛行時間 t 、最大高度 H 。

【討論】

1.拋體在最高點時的速度並不為零 ($v = v_0 \cos \theta$)

2.水平射程 R 的大小和初速 v_0 及仰角 θ 有關。若初速大小固定，則 $\theta = 45^\circ$ 時，即 $\sin 2\theta = 1$ ，可得最大的水平射程 $R = v_0^2/g$ 。若畫出以相同大小的初速，但不同的仰角射出所得的拋物線，可看出當仰角為 45° 時所得的水平射程最大。

3.若兩拋物線的仰角互為餘角時，例如 10° 和 80° 或 30° 和 60° ，則其水平射程相等。

4.拋體落地時的速度大小和拋出時的速度大小相等，惟仰角 θ 成為俯角 θ 。

例 11. A、B、C 三球同時同地由地表向空中斜向拋出，三球之運動軌跡在同一平面上。已知 A、B 兩球射程相同，均小於 C 球；B、C 兩球可達到之最大高度相同，均小於 A 球。

(e)請繪出三球之運動的軌跡，並排列出仰角大小

(a)請排列出飛行時間之長短

(b)請排列出初速的鉛直分量大小

(c)請排列出水平速度大小

(d)哪些球可在空中相碰撞

類 11.某人由地面同時向空中拋出 A、B 兩球，A 球的初速為 v_A 、仰角為 θ_A ；B 球則為 v_B 及 θ_B ，且 $\theta_A > \theta_B$ 。設兩球在同一平面內運動，而且所達到的最大高度也相同，則下列敘述何者正確？(A) $v_A < v_B$ (B) A 球之水平射程較 B 球遠 (C)兩球同時到達最高點 (D) A 球先著地 (E)兩球在空中相撞。【67 聯考】

例 12.在棒球比賽中，一打擊者以初速度 20 m/s，仰角 30° 在靠近地面處將球擊出，球沿游擊手方向飛出，此游擊手距離擊球處 40 m，以等速度跑近欲接住棒球，則他的速度應為何？

類 12-1. 在平坦的地面上，一足球運動員將球以 45° 的仰角踢出恰好踢进球門，假設球被踢出的初速度為 20 m/s ，則足球的 (a) 射程為何？ (b) 最大高度多少？ (c) 由射出至球入球門花費多少時間？ ($g=10 \text{ m/s}^2$)

類 12-2. 一棒球選手能投擲棒球的最高高度為 H 。若忽略空氣阻力及選手的身高，以相同的初速率拋出，欲得水平射程也是 H ，求拋射的仰角為何？

類 12-3. 在某星球表面，將小質點以 $1.8 \times 10^{-3} \text{ J}$ 之動能及 45° 的仰角射出，質點之質量為 $9 \times 10^{-2} \text{ kg}$ ，測得水平射程為 1.0 cm ，則該星球表面之重力加速度為若干？【103 指定考科類題】

例 13. 若以相同的速率但不同的仰角將小球由地面斜向拋出後，小球的水平射程均為 R ，但最大高度為 h_1 與 h_2 ，則 R 、 h_1 、 h_2 間的關係為何？

類 13-1. 從地面上以初速度 v_0 ，仰角 θ_0 斜向拋射一小球。設小球運動軌跡的最大高度為 H ，水平射程為 R ，試求 (a) H/R 之比值 (b) 若最大高度與水平射程相等，求 $\tan \theta$ 。

類 13-2. 以 v_0 之初速，斜向拋出一球，於運動過程中其速度最小值為 $v_0/2$ ，則此球可射到之最大高度為何？

◎若拋出與落地非同一平面，則射程公式不能使用，必須利用：

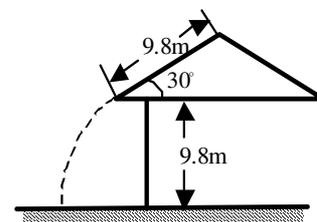
①鉛直方向為初速度 $v_0 \sin \theta$ 的等加速度運動 ($a = -g$)，找出飛行時間 t 。

②水平方向速度不變 → 所以射程 $R = (v_0 \cos \theta) \times t$

例 14. 某人從高度為 30 m 的樓頂上，以速度 10 m/s 及仰角 30° 斜向拋出一石頭。試求 (a) 物體從拋出後多少時間落到地面？ (b) 物體落地時的速度大小為何？ (c) 水平射程為何？ (d) 若改以俯角 30° 斜向拋出一石頭，其餘條件不變，則水平射程為何？

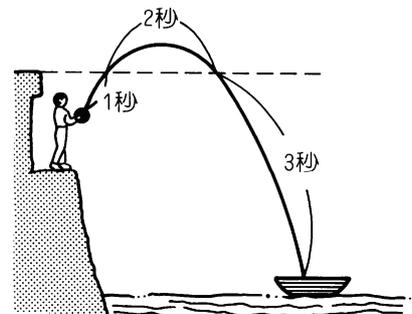
類 14. 一籃球員身高 200cm，站在罰球線處投籃，已知籃框至罰球線的水平距離為 6m，而籃框高度為 3m。若此籃球員以仰角 45° 從頭頂將球投出，希望能空心投入籃框內，則此籃球員投球的速度大小應為何？ ($g=10 \text{ m/s}^2$)

例 15. 一小石子自靜止由光滑屋頂頂端滑下。屋頂長 9.8 公尺，並與水平成 30° 角，屋簷離地 9.8 公尺(如右圖)，則小石從離開屋簷至落到地面需時_____秒。【85 聯考】



類 15-1. 如圖所示，小新站在某一山崖之凹洞中，以 25 m/s 之初速斜向拋出一球；此球經 1 秒後與崖頂等高(圖中虛線)，再經 2 秒後再次與崖頂等高，最後再經 3 秒落至崖底遠方水面之船上，則何者正確？

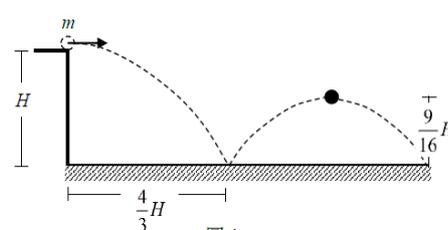
- (a) 拋出後，球離水面的最大高度為何？
- (b) 小新拋球時之仰角為何？
- (c) 拋出點離水面的高度為何？
- (d) 最高點速率為何？
- (e) 人與船之水平距離為何？ ($g = 10.0 \text{ m/s}^2$)



類 15-2. 阿勇站在游泳池的跳水板上。將一球以初速 v_0 往上拋出，發現初速度的水平分量須為垂直分量的 $4/3$ 倍，才能使球抵達小美所在的池面，若球出手處比池面高出 H ，重力加速度為 g ，且空氣作用力的影響可以忽略，【91 指定考科參考卷】

- (a) 初速度的水平分量與垂直分量各為何？
- (b) 球離手後，高度最大可上升多少？
- (c) 球在空中的飛行時間為何？
- (d) 球出手處與池面落點間的水平距離為何？

類 15-3. 一質量為 m 可視為質點的小球從離地 H 處水平射出，第一次落地時的水平位移為 $4H/3$ ，反彈高度為 $9H/16$ 。若地板為光滑，且空氣阻力可以忽略，而小球與地板接觸的時間為 t ，重力加速度為 g 。(a) 第一次落地碰撞期間，小球在鉛直方向所受到的平均作用力之量值為何？ (b) 小球第一次落地點到第二次落地點的水平距離為何？【102 指定考科】



例 16. 有兩個球從同一高處以相同的初速度 v_0 分別拋出，但其中一球的拋出角度為斜向上的仰角 θ_0 ，另一球則為斜向下的俯角 θ_0 ，試求兩球落地處之間的水平距離及時間差。

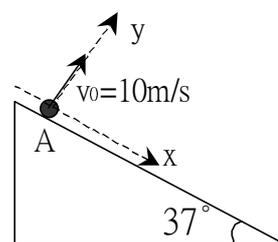
【綜合應用】

例 17. 重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$ ，一巨大光滑固定之平面與地面夾 30° 角，自斜面底邊以 19.6m/s 之初速與底邊成 45° 之夾角，將一石子沿斜面拋出，則石子落回底邊之點與出發點相距若干？



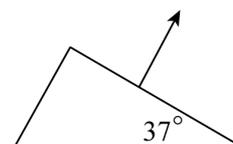
例 18. 一球由斜角 37° 的斜面上 A 點拋出，已知球拋出的初速為 10 公尺/秒，方向與斜面垂直。若重力加速度為 10 公尺/秒²，則根據圖中的坐標系分析小球運動時

- (a) 初速度的 x 分量與 y 分量為何？
- (b) 小球在空中運動時，加速度的 x 分量與 y 分量為何？
- (c) 小球在 x 軸與 y 軸方向上的運動方程式為何？
- (d) 小球在斜面上落點處的 y 坐標之值為何？
- (e) 小球在空中的飛行時間為何？
- (f) 小球之落點與出發點間的距離為何？



(g) 若拋出瞬間，恰有另一滑車自 A 點靜止下滑，若斜面為光滑，則小球落至斜面時，滑車與小球何者位移較大？【94 指定考科參考卷】

類 18. 一球由斜角 37° 的斜面上拋出，已知球拋出的初速為 10 公尺/秒，方向與斜面垂直。若重力加速度為 10 公尺/秒²，則小球之落點與出發點間的距離為何？



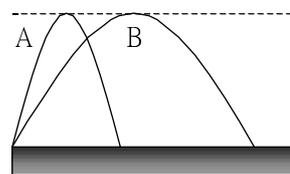
例 19. 在距地面高度 h 處有甲、乙兩物體。物體甲以初速 v_0 水平射出，物體乙也同時以初速 v_0 沿一傾斜角 45° 之光滑斜面以直線軌跡滑下。若甲、乙兩物體同時到達地面，求 v_0 之值。【75 聯考】

例 20. 某人在地上用彈弓以仰角 θ 瞄準水平距離 L 處之樹上木瓜，當彈丸射出的同時，木瓜同時由樹上落下，則 (a) 若能在空中命中木瓜，則其初速之值有何限制？(b) 如果彈丸的初速為 v_0 時可擊中木瓜，則命中的時刻為何（以彈丸射出的時刻為零）？

二、習題

【Part A】基本觀念題

- 欲使從地面拋射的物體，得到最大的水平射程，則應以何仰角拋出？如果欲得到最大的高度，則拋出的仰角應為何？
- 在斜向拋射運動的過程中，拋體軌跡上的哪個位置的速度量值最小？會等於零嗎？
- 將一物體從地面上斜向拋出，物體落地時的速率是否與拋出時的速率相等？
- 右圖所示為同時同地斜向拋出 A、B 兩物體的軌跡，哪一個在拋出時的初速率較大？又哪一個的全程飛行時間較長？兩物體是否會在空中相撞？
- 在地面上以初速 v_0 及仰角 θ 斜向拋出一物體，試以拋出點為 $x-y$ 坐標軸的原點，分別繪出該物體在水平方向的 a_x-t 圖、 v_x-t 圖、及 $x-t$ 圖，以及在鉛直方向的 a_y-t 圖、 v_y-t 圖、及 $y-t$ 圖。
- 一轟炸機以高速飛行，並連續投下炸彈，為何在時間上有先後投下的炸彈，由其它等速飛機上看起來，會排成上下成一直線狀的串列？
- 為何拋體運動在水平方向的速度為等速度，而斜面上的運動在水平方向卻不是等速度？



【Part B】加強練習題

1. 一物體在大樓頂以固定之初速大小 60 m/s ，以不同之水平夾角仰角 θ 拋出 ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$)，若拋出點為原點，且向上和向右為正方向，取重力加速度為 10 m/s^2 ，不計所有阻力，回答下列問題：

- (a) θ 為幾度時可射到最大高度？ (A) 0° (B) 45° (C) 90° (D) 都相同 (E) 需知道大樓高度才知道
- (b) θ 為幾度時物體最快著地？ (A) 0° (B) 45° (C) 90° (D) 都相同 (E) 需知道大樓高度才知道
- (c) 若 θ 為 45° 度，寫出整個過程的拋物線方程式。
- (d) 若 θ 為 0 度，且大樓高度為 320 公尺，則由拋出至落地共花費幾秒？
- (e) 若 θ 為 0 度，且大樓高度為 320 公尺，則落地前一剎那之速度大小為多少公尺/秒？

2. 在地表附近，一物體以初速度 \vec{v}_0 被拋射至空中。如果只受到地球的重力作用，則拋射體的運動軌跡必為一條拋物線，回答下列問題：【91學力測驗補考】

- (a) 以相同初速自地面拋射一小石頭，則下列敘述何者正確？
 - (A) 無論拋射仰角是多少，小石頭上升過程所經歷的時間都會與下降過程相同
 - (B) 無論拋射仰角是多少，小石頭在最高點的加速度都會等於零
 - (C) 無論拋射仰角是多少，小石頭在最高點的速度都會相同
 - (D) 拋射仰角愈大時，小石頭上升的最大高度會愈小
 - (E) 拋射仰角愈大時，小石頭所受的力會愈大
- (b) 初速為 12 m/s 、拋射仰角為 60° 的小石頭，在最高點的速度大小為多少 m/s ？
- (c) 由地面上拋、初速為 12 m/s 的一小石頭，落地時的速度大小為多少 m/s ？
- (d) 以 25 m/s 的初速鉛直上拋的一小石頭，上升至最高點經歷的時間約為多少秒？
- (e) 當重力加速度為 g 時，初速為零的自由落體沿鉛直方向下落的距離 d 與時間 t 的關係為 $2d=gt^2$ 。若以 60° 的拋射仰角，由地面拋出一小石頭，經過 4 秒後著地，則小石頭上升的最大高度為多少公尺？ ($g=10 \text{ m/s}^2$)

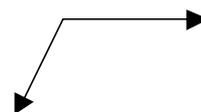
3. 有甲乙兩個大小相同的炮彈，由地球表面分別用 100 牛頓加速 1 秒後發射，甲發射後

| | | |
|---------------|------|------|
| 發射後時間 t (秒) | 0.1 | 0.2 |
| 甲高度(公尺) | 0.95 | 1.80 |
| 乙高度(公尺) | 1.68 | 3.26 |

的初速度與地面的夾角為 30 度，乙為 60 度。二者在發射後只受到地球重力的影響。表中列出了兩者在發射後不同時間相對於地表的垂直高度：【92學力測驗參考卷】

- (a) 下列何者為甲乙兩者初速度絕對值的比？ (A) $1:1$ (B) $1:\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}:1$ (D) 無法得知
- (b) 下列何者約為甲乙兩者的密度比？ (A) $1:1$ (B) $1:\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}:1$ (D) 無法得知
- (c) 下列何者約為甲乙兩者可到達的最大垂直高度比？ (A) $1:1$ (B) $1:3$ (C) $3:1$ (D) 無法得知

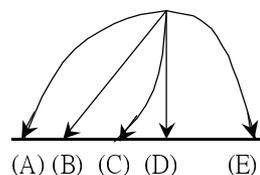
(d)一靜止於地面之炸彈，爆裂成等質量三塊，已知爆裂瞬間，其中兩塊之飛行方向如圖，則第三塊的飛行方向，以下列那一方向最有可能？(A)↘ (B)← (C)↓ (D)↑ (E)↖



4.已知月球上的重力加速度為地球上的六分之一，某登月太空人在地面上的跳遠和擲標槍的紀錄分別為 7.0 m 和 50.0m。若該太空人在月球上的體能狀況和在地面上相同，則他在月球表面上的跳遠和擲標槍的紀錄將為何？

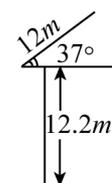
5.某跳遠選手在加速起跑後，以仰角 30° 從起跳線躍出，跳遠紀錄為 7.0m，則此跳遠選手從起跳線躍出時的速度為何？若他能設法使躍出時的初速度增加 10%，則跳遠紀錄將可增加成為多少？

6.在等速運動的火車中，向後水平拋射一物體，由站在車外地面的人看來，其運動軌跡可能成為右圖中哪幾條？【67 聯考】



7.將一質點自地面斜向拋射出去，最大高度為 45 公尺，有兩個時刻質點位在 25 公尺的高度，則這兩個時刻各為何？($g=10\text{m/s}^2$)

8.如圖，一鋼珠自靜止由光滑斜面頂端滑下，斜面長 12m，並與水平夾 37° 角，斜面底離地 12.2m， $g = 10\text{m/s}^2$ ，求鋼珠 (1)在斜面滑下之加速度？ (2)在離開斜面時速率？ (3)自斜面底至落地所需時間？ (4)著地瞬間速率？ (5)由斜面底斜下拋著地之水平位移？



9.一獵人持槍沿水平直線方向瞄準前方 100 m 處的靜止目標物。若子彈離開槍口的速度為 200 m/s，試問這樣的瞄準方式能否命中目標物？如果不能命中，將會偏差多少距離？

10.甲、乙兩球在高度 h 的樓上，以不同的方式開始運動，其中甲球由靜止下落，乙球則以初速 v_0 水平拋出。已知兩球同時出發，則(a)當甲球落地時，乙球離地的高度為何？(b)乙球在空中的飛行時間為何？(c)乙球的落地點與出發點的直線距離為何？

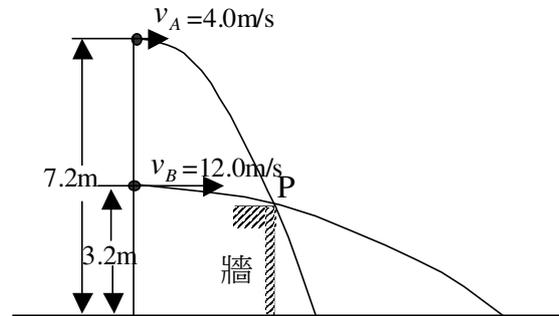
11.將小球以初速 v_0 水平拋出，則 (a)經過幾秒後，小球速度的水平分量與鉛直分量的大小相同？此時速度方向為何？此時小球的水平位移與鉛直鉛直落下之距離之比為何？(b)經過幾秒後，小球的水平位移與鉛直鉛直落下之距離相同？此時速度之方向為何？

12.一物體自高度 30 m 處以 2.0 m/s 水平拋出，則在落地前 2 秒內之速度變化量為何？

13. 一小球在高度 H 處，將小球水平拋出恰好擊中前方水平距離 R 處，高 h 的柱子上，則小球的初速應為若干？
14. 一架戰鬥機在炸射場進行投彈訓練。已知戰鬥機的水平速度為 v 、飛行高度為 h ，欲使炸彈正中地上之目標物，試問飛行員釋放炸彈的位置與目標間的水平距離應保持多遠？
15. 一質點在平面上運動，其 x 分量與 y 分量分別為 $x = -2t^2$ ， $y = 6t - 3$ （單位：SI 制）則 (a) 質點在第 3 秒的位置為何？ (b) 質點於 $0 \sim 3$ 秒間的位移為何？ (c) 質點在第 3 秒的速度為何？ (d) 質點在第 3 秒的加速度為何？ (e) 質點移動的軌跡方程式為何？
16. 一質點在平面上運動，其 x 軸上的速度分量恆為 $v_x = 2$ 公尺／秒， y 軸上的速度分量則為 $v_y = 2t + 1$ 公尺／秒。當時間 $t = 0$ 秒時，質點由坐標原點出發，則 (a) 質點的初速為何？ (b) 質點在第 3 秒的速度為何？ (c) 質點在前 3 秒內的位移為何？ (d) 質點的加速度為何？
17. 一砲彈以 30° 的仰角與 400 公尺／秒的初速，由地面斜向射出。假定砲身高度不計，且令重力加速度值為 10 公尺／秒²，試計算 (a) 砲彈離地的最大高度為何？ (b) 砲彈通過最高點時的速度為何？ (c) 砲彈落地時的速度與地面的夾角為何？ (d) 砲彈的水平射程為何？
18. 將一小球由高 H 之平台處以仰角 θ 斜向拋出。如拋出的時刻為零，則 (a) 小球通過最高點時的速率為初速的幾倍？ (b) 小球經過幾秒到達最高點？ (c) 小球離地的最大高度為何？ (d) 全程的飛行時間為何？ (e) 小球的水平射程為何？
19. 將一質點斜向拋出，已知質點的軌跡方程式為 $y = ax - bx^2$ ，則 (a) 質點出發仰角的正切值為何？ (b) 水平射程為何？ (c) 飛行過程的最大高度為何？ (d) 質點的初速為何？
20. 欲將一位於高度 h 之球水平拋入移動的貨車上。已知當球拋出時，球與貨車的水平距離為 L ，且當時的貨車的車速為 v_0 。若貨車係以等加速度 a 移動，且貨車高度不計，則 (a) 小球經過幾秒落於貨車上？ (b) 小球的初速為若干？
21. 由 80 公尺高處將一物以 20 公尺／秒的速度水平拋出，則經過 2 秒後 ($g = 10$ 公尺／秒²) (a) 當時速度與水平線間的夾角為何？ (b) 當時的速度量值為若干？ (c) 當時的切線加速度與法線加速度量值各為若干？
22. 一石頭自地面以速度 v_0 ，仰角 θ ，作協向拋射，當石頭的高度為最大高度的一半時，其速率為 v_0 的幾倍？
23. 有一條寬度為 $2R$ 的河流，兩岸高度相同。阿勇站在岸邊，擬將某物投擲至對岸與河床上。設出手高度與空氣作用力的影響，均可忽略，而該地之重力加速度為 g ，河岸比河床高出 H 。【91 指定考科預試題】
- (i) 若阿勇要將此物投擲至對岸，則：(a) 初速最小須為何？ (b) 以最小初速投擲時，拋射仰角為何？

(ii)當阿勇以 v_0 的初速，欲將此物投擲到兩岸中點的河床上時，發現初速度的水平分量須為垂直分量的 $4/3$ 倍，則：(c)初速度的水平分量與垂直分量各為何？(d)此物的飛行時間與水平距離各為何？(以 v_0 、 H 、 g 表之)(e)若 $v_0 = \sqrt{gR}$ ，則 H 與 R 之比為何？

24. 甲物體在高 7.2m 處以 $v_A=4.0\text{m/s}$ 的速度向右水平拋出，同時在甲物體位置的正下方，離地高 3.2m 處，將乙物體以 $v_B=12.0\text{m/s}$ 的速度向右水平拋出，如圖 12 所示。兩物體的飛行軌跡在同一鉛直面，而且都恰掠過一牆的頂端 P 點，則甲與乙抵 P 點的時間差及牆離地的高度各為何？(重力加速度 $g=10.0\text{ m/s}^2$) 【92 指定考科參考卷】



- (A) 甲與乙同時抵達 P 點，牆高 2.4m
- (B) 甲與乙同時抵達 P 點，牆高 2.7m
- (C) 乙比甲早約 0.63 秒抵達 P 點，牆高 2.4m
- (D) 乙比甲早約 0.63 秒抵達 P 點，牆高 2.7m

若 A 在拋出後 t_1 秒通過 P 點，B 在拋出後 t_2 秒通過 P 點，則下列各等式何者正確？

- (A) $t_1=t_2$
- (B) $4.8t_1=9.6t_2$
- (C) $4.8-5.0t_1^2=9.6-5.0t_2^2$
- (D) $7.2-5.0t_1^2=3.2-5.0t_2^2$

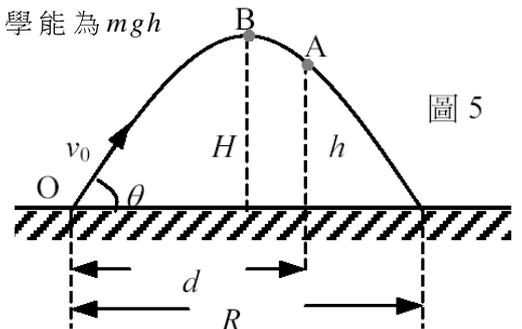
25. 一粒質量為 m 的小石頭從地面上的 O 點以初速 v_0 ，仰角 θ 被射出，如圖所示。B 點為小石頭運動軌跡的最高點，B 點與地面距離為 H 。A 點則是越過最高點後的某一位置，A 點與 O 點間的水平距離為 d ($\frac{2R}{3} > d > \frac{R}{2}$ ， R 為水平射程)，A 點與地面間的距離為 h 。若將小石頭在地面的重力位能取為零，重力加速度為 g ，且不計空氣阻力，則下列有關小石頭的敘述，哪些正確？(A) 在 A 點的總力學能為 mgh

(B) 從 O 點運動至 A 點共需時 $\frac{d}{v_0}$

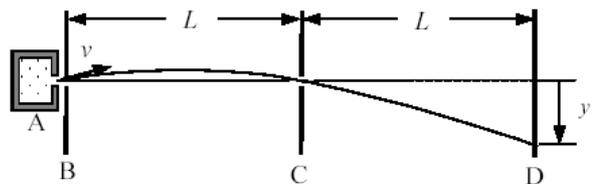
(C) 從 O 點運動至 A 點共需時 $\frac{v_0 \sin \theta}{g} + \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

(D) 在最高點 B 時，速度與加速度互相垂直

(E) 從 O 點運動至 A 點的過程中，重力總共作功 mgh 【93 指定考科補考】



26. 右圖為一研究氣體分子速率分布的實驗裝置。A 為高溫爐，氣體分子從爐壁的小孔射出，B 和 C 為附有細縫的隔板，D 為屏幕。兩隔板和屏幕之間皆相距 L 。爐壁的射出孔和隔板上的細縫彼此對準，且位在同一水平面上。從爐壁小孔射出的氣體分子，若能穿過兩細縫，將蒸鍍在屏幕上。在整個飛越過程中，氣體分子僅受到地球引力的作用。已知 $L=1.0\text{m}$ ，測得在屏幕上某一條蒸鍍痕跡的位置高度 $y=1.1 \times 10^{-4}\text{m}$ ，則對應該位置的氣體分子的射出初速 v 為何？【93 指定考科參考卷】



第 2-1 節 例題與類題解答

【例 1】(a) $\vec{r}_A = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ，大小 5m，與 +x 軸夾 37° (b) $\vec{r}_B = -5\vec{i} + 12\vec{j}$ ，大小 13m，與 +x 軸夾 $\tan^{-1}(\frac{12}{-5})$ (c) 位移 = $9\vec{i} + 9\vec{j}$ ，大小 $9\sqrt{2}$ m，方向與 +x 軸夾 135°。

【類 1-1】 $2R$ 【類 1-2】 $2L\sin(\frac{\theta}{2})$ ； $L\theta$

【例 2】略 【例 3】(a) $2a$ (b) $\sqrt{2}a$ (c) a (d) $\sqrt{3}a$ (e) $\sqrt{2+\sqrt{2}}a$

【類 3-1】 $2a\cos(\frac{\theta}{2})$

【類 3-2】 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2} = \frac{(-1 \times 1) + (3 \times 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\theta = \underline{45^\circ}$

【例 4】 $\sqrt{20^2 + (10\sqrt{3} - 8)^2} \sim 22\text{kgw}$ 。

【例 5】是 【例 6】平行於斜面 $\frac{g}{2}$ ；垂直於斜面 $\frac{\sqrt{3}g}{2}$

【例 7】(a) (2,0) (b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (c) 0

【類 7-1】 $t = \frac{x}{2}$ 代入 $y = 3t^2 = 3 \cdot (\frac{x}{2})^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{4}{3}$ 即 $3x^2 - 4y = 0$ 【類 7-2】 $t = \pm(x+1)$

第 2-1 節 習題解答

【Part A】

- ① 平行斜面 $a = g\sin\theta$ ；垂直斜面 $a = g\cos\theta$ ；此時答案唯一，因為已經限制要分在平行斜面與垂直斜面上，分法就只有一種了。
 ② 漸漸減小；仍是漸漸變小。
 ③ 有可能，分成的兩向量夾角 120° 時，大小和原向量相等。(很重要的結論)
 ④ 有可能，此時三者必在同一直線上，且三者方向相同。

【Part B】① 17m/s；7m/s ② 大小為 20，方向與 12 的向量夾 127° ($90 + 37$) 度角 ③ 向東 50m/s，向北 86.6m/s ④ 向東 $25\sqrt{3}$ m/s，向北 75m/s，向上 50m/s ⑤ C

第 2-2 節 例題與類題解答

【例 1】平均速度 $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ (km/min)；平均速率 1km/min.。

【類 1】 $\frac{2\pi L}{3T}$ 。平均速率 $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L(\frac{\pi}{3})}{\frac{T}{2}} = \frac{2\pi L}{3T}$

【例 2】(a) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ (cm/s) ↘ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (cm/s) (c) $\frac{2}{3}\pi$ (cm/s) (d) $\frac{2}{3}\pi$ (cm/s) → (e) $\frac{2}{3}\pi$ (cm/s) ↓

(f) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{45} (\text{cm/s}^2)$ ✓ 【類 2】 $\frac{\sqrt{3}v}{t}$

【例 3】(a) $\frac{4}{5}\sqrt{2} (\text{m/s}^2)$ ✓ (b) $\frac{2}{5}\pi (\text{m/s}^2)$ (向圓心)

【類 3】(a) $(2\pi L \sin \theta) / t$; (b) $(4L \sin \theta) / t$; (c) $(8\pi L \sin \theta) / t^2$

【例 4】 $(v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2) / t$

【類 4】B 將 v_1 及 v_2 分解，則 $\Delta v_y = 6\text{m/s}(\uparrow)$ ， $\Delta v_x = 56\text{m/s}(\leftarrow)$

速度變化量值 $\Delta v = \sqrt{(6)^2 + (56)^2} = 56.32(\text{m/s}) \therefore a_{av} = \frac{\Delta v}{0.02} = 2816(\text{m/s}^2)$

【例 5】(a) $2\vec{i} + 3q\vec{j}$ (b) 速度 $2\vec{i} + 6q\vec{j}$; 加速度 $2q\vec{j}$ 。

【類 5-1】 10m/s 【類 5-2】 10m/s^2 。

$\vec{r} = (3t^2 + 5)\vec{i} + (4t^2 + 3)\vec{j}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} - 8t\vec{j}$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10(\text{m/s}^2)$

【類 5-3】A (位置-時間圖的斜率代表速度，故質點的初速度為 $\hat{i} + 2\hat{j}$ (m/s))

【例 6】BCD 【類 6】AC

第 2-2 節 習題解答

【Part A】

①位移。 ②該點之速度、該點之切線方向。 ③受力、速度變化。

④向東偏北 53° 做等速度運動。 $\vec{r}(t) = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$

⑤x 方向等速，y 方向等加速運動，合成為向上開口之拋物線。 $\vec{r}(t) = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$

⑥x、y 方向均為等加速運動，合成為東偏北 53° 等加速度直線運動。 $\vec{r}(t) = 1.5t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}$

⑦ $\vec{r}(t) = (3 + t^2)\vec{i} + (10t - 2t^2)\vec{j}$ 、 $\vec{v}(t) = 2t\vec{i} + (10 - 4t)\vec{j}$ 、 $\vec{a}(t) = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

⑧是的，必做等速度直線運動。

【Part B】①299km；64km/h ② $2\sqrt{2}/3 \text{ cm/s}$ ； $\pi/3 \text{ cm/s}$ ③ 1m/s 西偏北 37° ④ 1.67

km 東偏南 53° ；2.33km；約 14m/s 東偏南 53° ；19.4m/s ⑤甲和丁、乙和丙；甲、

$4\sqrt{2} \text{ m/s}$ ； 135° ⑥ p 向右；q 向下；r 向右；s 向右上 ⑦(1) $\frac{6R}{T}$ ，(2) $\frac{12\pi R}{T^2}$ ⑧ $(\pi/150)$

m/s； $(\pi/150) \text{ m/s}$ 向右； $\sqrt{2}/5 \text{ m}$ 向右下； $(\sqrt{2}/75) \text{ m/s}$ 向右下； $(\sqrt{2}\pi/2250) \text{ m/s}^2$

向左下 ⑨ $(-5, 5\sqrt{3}) \text{ m/s}$ ；1s ⑩ $(3, -2) \text{ m/s}$ ； $(9, -6) \text{ m/s}$ ； $(13, -4) \text{ m}$ ⑪ $(0,$

$1) \text{ m/s}$ ； $5/3$ ； $(2, 2t) \text{ m/s}^2$ ； $(2, 3) \text{ m/s}^2$ ⑫ C ⑬ $-1.5\vec{j}$ ； $4.5\vec{i} - 2.25\vec{j}$

Part B 解答提示：

⑫甲之座標 $(0, vt)$ ，乙之座標 $(-d+vt, 0)$ ，距離為 $\sqrt{(d-vt)^2 + (vt)^2} = \sqrt{d^2 - 2vtd + 2v^2t^2}$ ，
故 $t=d/2v$ 時有極小值 $d/\sqrt{2}$ 。

⑬(1)由運動之獨立性及起始條件知：

$\vec{v}(t) = (3-t)\vec{i} - 0.5t\vec{j}$; $\vec{r}(t) = (3t - 0.5t^2)\vec{i} - 0.25t^2\vec{j}$

(2)+ \vec{i} 方向到達最遠時 $v_x = 3-t=0 \Rightarrow t=3\text{s}$ 時。 $\therefore \vec{v}(3) = -1.5\vec{j}$

$\vec{r}(3) = 4.5\vec{i} - 2.25\vec{j}(\text{m})$

第 2-3 節 例題與類題解答

【例 1】E 【類 1-1】AB 【類 1-2】D

【例 2】3000m 【類 2】(a)相同時間落地 (b) $90\sqrt{5}$ m

【例 3】 $\frac{\sqrt{3}v_0}{g}$ 【類 3-1】4.05m 【類 3-2】 $7v_0/12g$ 【例 4】ACD

【類 4】由圖 $y = \frac{1}{4}x^2$ 又由軌跡方程式 $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$ ；比較得 $\frac{10}{2v_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{5}$ m/s

【例 5】(a) $10\sqrt{2}$ m/s (b) $\tan\theta = 2$ (c) 切線加速度 $4\sqrt{5}$ m/s²；法線加速度 $2\sqrt{5}$ m/s²

【類 5-1】(a) $\frac{\sqrt{3}v}{g}$ (b) $\frac{\sqrt{3}v^2}{g}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}g$ 【類 5-2】2h 【例 6】(a) $\frac{40}{3}$ m (b) 20 m

【例 7】第 10 階； $\frac{\sqrt{15}}{5}$ s

【例 8】D 【類 8-1】A 【類 8-2】BE 【類 8-3】A

【例 9】(a) 加速度 = -10 m/s²、速度 $20\sqrt{3}\vec{i} - 10\vec{j}$ m/s、位移 $60\sqrt{3}\vec{i} + 15\vec{j}$ m

$$(b) y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{240}x^2$$

【類 9-1】(a) 水平位移 750 m；距地高度 218.75 m (b) 速度大小 75 m/s；與水平夾俯角 37° (c) 加速度 10 m/s²；切線加速度 6 m/s²；法線加速度 8 m/s²

$$(d) y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{720}x^2 \quad \text{【類 9-2】} \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin 60^\circ - gt}{v_0 \cos 60^\circ} = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad t = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g}$$

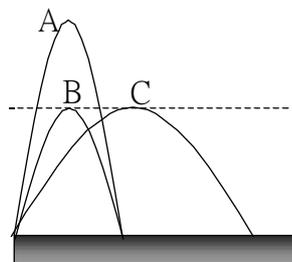
【例 10】(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ m/s (c) $5\sqrt{2}$ m/s² 【類 10】水平分量 3.13 m/s；垂直分量 2.35 m/s

【例 11】(a) 軌跡如右圖， $A > B > C$ (b) $A > B = C$ (c) $A > B = C$

(d) $C > B > A$ (e) 無 【類 11】AC

【例 12】 $20 - 10\sqrt{3}$ ~ 2.68 m/s 【類 12-1】(a) 40 m (b) 10 m

(c) $2\sqrt{2}$ s 【類 12-2】15° 或 75°



【類 12-3】 4m/s^2 【例 13】 $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$

【類 13-1】(a) $(\tan\theta)/4$ ；(b) 4 【類 13-2】 $\frac{3v_0^2}{8g}$

【例 14】(a) 3s (b) $10\sqrt{7}$ m/s (c) $15\sqrt{3}$ m (d) $10\sqrt{3}$ m

【類 14】 $6\sqrt{2}$ m/s

【例 15】1.0s 【類 15-1】(a) 80m (b) 53° (c) 60m (d) 15m/s (e) 90m

【類 15-2】(a) 水平分量 $\frac{4}{5}v_0$ ；垂直分量 $\frac{3}{5}v_0$ (b) $\frac{9v_0^2}{50g}$ (c) $\frac{3v_0}{5g}(1 + \sqrt{1 + \frac{50gH}{9v_0^2}})$

(d) $\frac{12v_0^2}{25g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{50gH}{9v_0^2}}\right)$ 【類 15-3】 (a) $\frac{7m\sqrt{2gH}}{4t}$ (b) $2H$

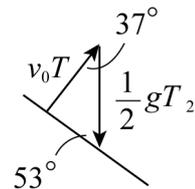
【例 16】 $\frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$; $\frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$

【例 17】 78.4m

【例 18】 (a) $v_x = 0$ 、 $v_y = 10\text{m/s}$; (b) $a_x = 6$ 、 $a_y = -8\text{m/s}^2$; (c) $x = 3t^2$ 、 $y = 10t - 4t^2$; (d) $y = 0\text{m}$; (e) 2.5s (f) 18.75m (g) 相同

【類 18】 令飛行時間為 T ，由 $\frac{1}{2}(10)T^2 \cos 37^\circ = 10T$ ，得 $T = 2.5$ (s)

$$R = \frac{1}{2}(10)(2.5)^2 \cos 53^\circ = \frac{75}{4} \text{ (m)}。$$



【例 19】 滑下斜面之時間： $\sqrt{2}h = v_0 t + \frac{1}{2}g \sin 45^\circ t^2$;

水平拋體落地時間： $h = \frac{1}{2}gt^2$ 。聯立消去 t ，解得 $v_0 = \sqrt{gh} / 2$ 。

【例 20】 (a) 相遇條件：木瓜掉至地面前，彈丸抵達水平距離 L 之高度 h 之木瓜處。即 $h = L \tan \theta > \frac{1}{2}gt^2$ 且 $(v_0 \cos \theta)t = L$ 。消去 t ，得 $v_0 > \sqrt{gL / \sin 2\theta}$ (b) $L / (v_0 \cos \theta)$

第 2-3 節 習題解答

【Part A】

- ① 45° 、 90° 。 ② 最高點；除非鉛直上拋否則最高點速度不為零。
- ③ 是。 ④ B；相同；不會。
- ⑤ 角度愈大高度愈高；但水平距離 45° 時最遠， 30° 及 60° 次遠； 15° 及 75° 較近； 90° 時鉛直落下。
- ⑥ 因為慣性的關係，每顆炸彈投出後均有與飛機相同的水平速度（它不像飛彈本身還有燃料可向前推進），故由飛機上看下去變成一條直線。
- ⑦ 因為斜向拋射時，物體只受到鉛直方向的重力，水平方向沒有受力，故水平方向因慣性保持等速前進；但物體沿斜面下滑時，除了受到重力外，尚有垂直斜面的支持力 N ，整個水平方向的合力不為零，故水平方向並非等速。

【Part B】 ① C；A； $y = x - x^2/360$ ；8s；100m/s ② A；6m/s；12m/s；2.5s；20m

- ③ A；A；B；E ④ 42m 和 300m ⑤ 8.9m/s；8.5m ⑥ ADE ⑦ 1 或 5 秒 ⑧ (1)6m/s²，(2)12m/s，(3)0.2s，(4)13.3m/s，(5)1.92m ⑨ 否；差 1.23m ⑩ 0； $\sqrt{2h/g}$ ； $\sqrt{h^2 + 2hv_0^2/g}$
- ⑪ v_0/g ；俯角 45° ；2：1； $2v_0/g$ ； $\tan^{-1}2$ ⑫ 19.6m/s 向下 ⑬ $R\sqrt{g/2(H-h)}$ ⑭ $v\sqrt{2h/g}$ ⑮ (-18, 15)m；(-18, 18)m；(-12, 6)m/s；(-4, 0)m/s²； $18x = -(y+3)^2$ ⑯ (2, 1)m/s；(2, 7)m/s；(6, 12)m；(0, 2)m/s² ⑰ 2000m； $200\sqrt{3}$ m/s； 30° ； $8000\sqrt{3}$ m ⑱ $\cos \theta$ ； $(2v_0 \cos \theta)/g$ ； $h + (v_0 \sin \theta)^2/2g$ ⑲ a；a/b； $a^2/4b$ ； $\sqrt{(1+a^2)g/2b}$
- ⑳ $\sqrt{2h/g}$ ； $v_0 + (a\sqrt{2h/g})/2 + L\sqrt{g/2h}$ ㉑ 45° ； $20\sqrt{2}$ m/s；均為 $5\sqrt{2}$ m/s² ㉒

$$\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}} \text{ 倍 } \textcircled{23} \text{ (a) } \sqrt{2gR} \quad \text{(b) } 45^\circ \quad \text{(c) } v_x=4v_0/5, v_y=3v_0/5 \quad \text{(d) } t=\frac{3v_0}{5g}\left(1+\sqrt{1+\frac{50gH}{9v_0^2}}\right),$$

$$R=\frac{12v_0^2}{25g}\left(1+\sqrt{1+\frac{50gH}{9v_0^2}}\right) \quad \text{(e) } 1/32 \quad \textcircled{24} \text{ D ; D } \quad \textcircled{25} \text{ CD } \quad \textcircled{26} \text{ } 3.0\times 10^2 \text{ m/s}$$

Part B 解答提示：

②② 設高度一半時之速率 v ，則 $v^2 = v_0^2 - 2g\left(\frac{H}{2}\right)$

又最高點速率 $v_0 \cos\theta = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$ 消去 H 得 $v = v_0 \sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}}$

②④ 設 A 在拋出後 t_1 秒通過 P 點，B 在拋出後 t_2 秒通過 P 點，兩者水平距離相等，即 $4t_1 = 12t_2$ ；又離地高度相等，即 $7.2 - 5t_1^2 = 3.2 - 5t_2^2$ ，解 t_1 、 t_2 。

②⑥ BC 射程 $L = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ ；CD 水平方向 $L = (v \cos\theta)t$ ，鉛直方向 $y = (v \sin\theta)t + \frac{1}{2}gt^2$ ；消去時間

t 後得 $\tan\theta = y/2L$ ，代回 $L = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ 解得 $v = \sqrt{\frac{g(y^2 + 4L^2)}{4y}} \sim L \sqrt{\frac{g}{y}} = 3.0 \times 10^2 \text{ m}。$