桃園縣立平鎮高中 103 學年度　第二學期　高三自然組第一次月考試卷　數學科
適用班級：308、310、311、312、313　考試範圍：第六冊第一章　科目代碼：04
試卷張數：共計 3 頁 3 張　填答方式：請將答案劃入卡片中

一、單選題 （6 題 每題 5 分，答錯不倒扣 ）

1、已知 $b_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{(2n)^2})$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 之值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) 1 (5) 2 .

2、設高斯符號 $[x]$ 表示小於或等於實數 x 之最大整數，則 $\lim\limits_{x\to 0}[\sin x]$ 之值為 (1) -1 (2)0 (3)1 (4)不存在

3、請判斷下列哪一個函數的定義域為 $\{x\in R|x>2\}$？

(1) $f(x)=\frac{x}{x-2}$ (2) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ (3) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{6-x}}$ (4) $f(x)=\log_x(x-2)$ (5) $f(x)=|x-2|$.

4、設函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}, & 當\ x\neq 2\\ k, & 當\ x=2\end{cases}$ 為連續函數，則 k 值為何?

(1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8 .

5、有一個皮球從 300 公尺的高處落下，每次反跳 $\frac{1}{3}$ 的高度，則此皮球至停止時所經過的路徑總長為下列哪一個選項? (1) 900 (2) 750 (3) 600 (4) 450 (5) 400 .

6、已知 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-ax+b}{x-1}=2$，則 $2a+4b$ 之值為 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4 .

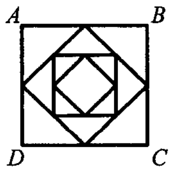
二、多重選擇題（5 題 每題 5 分，全對給 5 分，錯 1 個選項給 3 分，錯 2 個選項給 1 分，其餘給 0 分 ）

7、下列數列哪些會收斂到 0? (1) $(\frac{\pi}{3})^n$ (2) $\frac{(-1)^n}{n}$ (3) $(0.9999)^n$ (4) $(\frac{1}{\sqrt{3}-1})^n$ (5) $\frac{(0.4)^n}{(0.3)^n+(0.5)^n}$

8、已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{3n+6}=6$，其中 a，b，c 為實數，下列何者為真?

(1) $a=18$ (2) $a=0$ (3) $b=6$ (4) $b=18$ (5) $c=108$.

9、如圖，一正方形 $ABCD$ 邊長爲 4，將四邊中點相連，得第二個正方形，再將第二個正方形四邊中點相連，得第三個正方形，一直重複這些步驟。若第 k 個正方形的面積與周長分別爲 a_k, b_k，試問下列哪些選項是正確的？



(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 32$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 32$

(3) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

(4) $\lim_{k\to\infty} b_k$ 不存在

(5) 若 $c_k = \frac{a_k}{b_k}$，則 $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$.

10、令 $f(x) = x^3 - 3x^2 - ax + 1$，設 b,c 爲方程式 $f(x)=0$ 的根且 $b<c$，若 b,c 爲無理數且 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)} = -2$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a=1$
(2) $b\times c<0$
(3) $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ 爲收斂數列
(4) $b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$ 爲收斂數列
(5) $c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$ 爲收斂數列 .

11、將 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $x_1 = \frac{\pi}{6}$

(2) $\lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = \frac{2}{3}\pi$

(3) $\lim_{k\to\infty}(x_{2k+2} - x_{2k}) = 2\pi$

(4) $\sum_{k=1}^{60}|x_{2k} - x_{2k+2}| = 60\pi$

(5) $\sum_{k=1}^{60}|x_k - x_{k+1}| = 60\pi$.

三、選填題 （9 題 每題 5 分，整題答對給 5 分，答錯不倒扣 ）

A、試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+4n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$ 之值爲___⑫___。

B、設 $f(x)=-x^2+4x+10$，但 $-4\le x\le 3$，若 $f(x)$之值域爲 $a\le f(x)\le b$，則 $a+b$ 之值爲___⑬⑭___。

C、若 $6n^2+3<2n^2a_n<6n^2+6n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$___⑮____。

D、設 $f(x)=x^3$，$g(x)=\log x$，其中 $x>0$，若$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$之解爲 α,β,γ，則 $\alpha\beta\gamma$ 之值爲____⑯____。

E、求 $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{x^2+2x}{x-3}-\frac{x^2+12x}{x^2-3x})$ 之值爲_____⑰_____.

F、設 $f(x)$爲三次多項式，若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=-2$ 且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=5$，則 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 之值爲____⑱⑲____。

G、已知數列 $<a_n>$ 爲收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{a_n+2}=5$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值爲____⑳㉑____。

H、已知無窮等比級數 $<a_n>$，若 $a_1+a_3+a_5=42$， $a_2+a_4+a_6=21$，求此無窮等比級數的和爲____㉒㉓____。

I、設 T_1，T_2，⋯，T_n，⋯爲一序列多邊形，其作法如下：T_1爲邊長等於 1 之正三角形；以 T_n每一邊中間三分之一的線段爲一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去，所得的多邊形爲 T_{n+1}，$n=1$，2，3，⋯（如下圖所示），其形態似雪花，稱爲科赫雪花（Koch snowflake）. 令 a_n表 T_n的面積，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{b}\sqrt{3}$，

試求數對 $(a,b)=$____(㉔，㉕)_____。