桃園市立平鎮高級中學 103 學年度 第二學期高二數學第二次期中考題目卷

適用班級：201~214
考試範圍：數學(四) 2–2~3–3
命題教師：陳威男
答題說明：請各位同學將答案依題號依序填入答案卡中。
注意事項：
試卷張數：共計 4 頁
填答方式：答案卡 ____年______班 ____號 姓名：______________

一、單選題：(每題 5 分，答錯不扣分)

1.下列哪一條直線與$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$垂直?

(1) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ (2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ (3) $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ (4) $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{3}$ (5) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3}$

2. 選出與直線L:$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$平行的平面?

(1) $2x-y+3z=4$ (2) $x-y-z=-2$ (3) $x-4y-2z=-7$ (4) $x-10y-4z=17$ (5) $2x+7y+z=11$

3. 已知$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&-4&9\\-3&5&-1\\7&-2&8\end{bmatrix}$，C=AB $=[c_{ij}]$，則 c_{23} 元的值=？

(1) -12 (2) 3 (3) -7 (4) 26 (5) -29

4. 設二階方陣$A=\begin{bmatrix}1&2\\c&d\end{bmatrix}$，已知 A 的反方陣 A^{-1} 存在，且 $A^{-1}=A$，則 $c+d$ 的值為下列何者?

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 2 (5) -2 .

二、多選題：(每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 3 分，錯兩個選項可得 1 分，不作答或錯三個以上選項不給分。)

5. 已知 A、B、C 均為二階方陣，O 為二階零方陣，I 為二階單位方陣，則下列敘述何者正確?

(1) 若 $AB=AC$，且 $\det(A)\neq 0$，則 $B=C$
(2) 若 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$，則 $AB=BA$
(3) 若 $A^2=O$，則 $A=O$
(4) 若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$
(5) $A^2-I=(A+I)(A-I)$

6. 所謂「轉移矩陣」須滿足下列兩個條件：

(甲) 該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數　　(乙) 該矩陣的每一行的數字相加都等於 1

以 2×2 矩陣為例，$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$ 滿足(甲)(乙)這兩個條件，因此都是轉移矩陣。

設二階方陣 A 與 B 均為轉移矩陣，下列各選項中何者亦為轉移矩陣?

(1) $\frac{1}{4}(7A-3B)$　(2) AB　(3) $\frac{1}{8}(A+B)^3$　(4) $\frac{1}{3}(2A+B)$　(5) B^{-1} .

7. 下列哪一個矩陣經過列運算後可化成 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$?

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. 關於直線 L: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$，選出正確的選項:

(1) L 的方向向量為$(1,-1,3)$

(2) 點$(2,3,7)$在 L 上

(3) L 與直線 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{3}$ 平行

(4) L 與平面 $x+2y-z=1$ 平行

(5) L 落在平面 $x-y=-1$ 上

9. 假設由三相異方程式所形成之三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 有一組解$(2,1,2)$，則下列哪些選項是此方程組的解?

(1) $(0,0,0)$　(2) $(3,2,3)$　(3) $(-2,-1,-2)$　(4) $(1,\frac{1}{2},1)$　(5) $(4,-2,4)$

三、選填題：(每題 5 分，全對才得分)

A. 解方程組$\begin{cases} x-y+2z=15 \\ 2x-y-2z=-11 \\ 5x-3y-z=1 \end{cases}$，得序對$(x,y,z)=$ $\underline{(⑩,⑪,⑫)}$。

B. 若方程組$\begin{cases} x-2y+z=a \\ x-9y+5z=9 \\ 2x+3y-2z=3 \end{cases}$有解，則 $a=$ $\underline{⑬}$。

C. 若矩陣$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix}$經過矩陣列運算後可得矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -4 \end{bmatrix}$，則聯立方程式$\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=4 \end{cases}$

的解$(x,y)=$ $\underline{(⑭,⑮)}$。

D. 君偉有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，逸軒向他借用這台自行車，他答應借用，但只告訴逸軒號碼鎖的密碼 *abcd* 符合以下二階方陣的等式：

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix},$$

逸軒卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙逸軒求出這副號碼鎖的正確密碼：$\underline{⑯⑰⑱⑲}$。

E. 一實驗室培養兩種菌，令$\langle a_n \rangle$和$\langle b_n \rangle$分別代表兩種培養菌在時間點 n 的數量，彼此有如下的關係：

$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=2b_n$ ， $n=0,1,2,\ldots$，若二階方陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，

(其中 $n=0,1,2,\ldots$)，則 A= $\underline{\begin{bmatrix} ⑳ & ㉑ \\ ㉒ & ㉓ \end{bmatrix}}$。

F. 某架飛機沿直線 L 的方向飛行且與平面 $E：2x+y+2z=0$ 交於 P 點，已知 L 通過點 $A(2, 0, 4)$，$B(2, 1, 2)$，則 P 點座標為$(x,y,z)=$ $\underline{(㉔,㉕,㉖㉗)}$。

G. 若直線$\begin{cases}3x-y+z+2=0\\x+2y+z-4=0\end{cases}$的方程式為$\dfrac{x-3}{b}=\dfrac{y-a}{c}=\dfrac{z+7}{-7}$，求序對$(a,b,c)=$ (㉘,㉙,㉚) 。

H. 設$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&2\\3&k\end{bmatrix}$，若$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$成立，則$k=$ ㉛ 。

I. 已知二階方陣A與B滿足$A+B=\begin{bmatrix}3&3\\4&8\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&0\end{bmatrix}$，則$A^2-B^2=\begin{bmatrix}㉜&㉝\\㉞&㉟\end{bmatrix}$。

J. 設二階方陣A滿足$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$，則矩陣$A=\begin{bmatrix}㊱&㊲\\㊳&㊴\end{bmatrix}$。

K. 設甲、乙二袋中各有一白球和一紅球，對這二袋做以下的操作：

自各袋內任取一球（每球被取到的機會均等）放入對方袋中，如此甲袋內只有三種情況：

狀態 1：甲袋內有兩個白球。

狀態 2：甲袋內有一白球和一紅球

狀態 3：甲袋內有兩個紅球。

將狀態j經過一次操作後會變成狀態i的機率為p_{ij}，令轉移矩陣$M=(p_{ij})_{3\times 3}$。

則經過 3 次操作後，甲袋中有一白球和一紅球的機率$=\dfrac{㊵}{㊶}$。